

廖理论的学习、传播、应用、推广与创新

甘少波

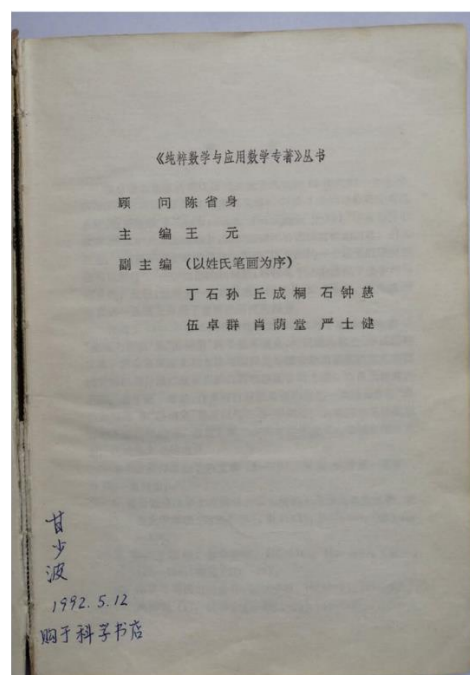
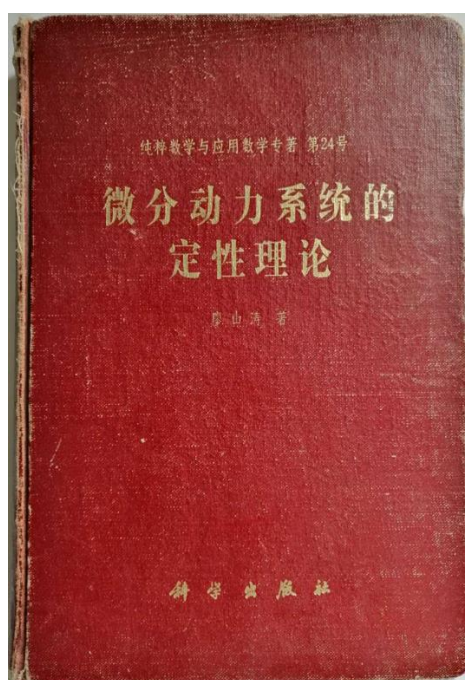
我认识廖先生很晚，没有太多机会聆听先生的教诲。但近年来越来越觉得从先生独创的理论中受惠良多，借此机会表达我对先生的感激之情。

我讲一下自己经历的廖理论的学习、传播、应用、推广与创新。由于孙文祥老师对于廖理论的“统计式”方面已有很好的阐述，下面主要围绕廖理论的“拓扑式”方面（阻碍集理论）展开。

本科毕业后，在导师詹汉生老师推荐下，我在1989年进入北大开始硕士生涯。本来詹老师建议我选廖山涛先生作导师学习微分动力系统，但先生那时已经不再招收研究生，真正与先生见面应该是多年后的事了。

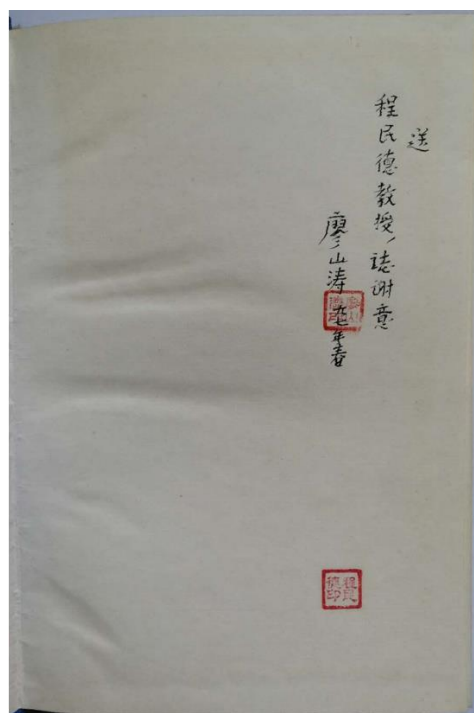
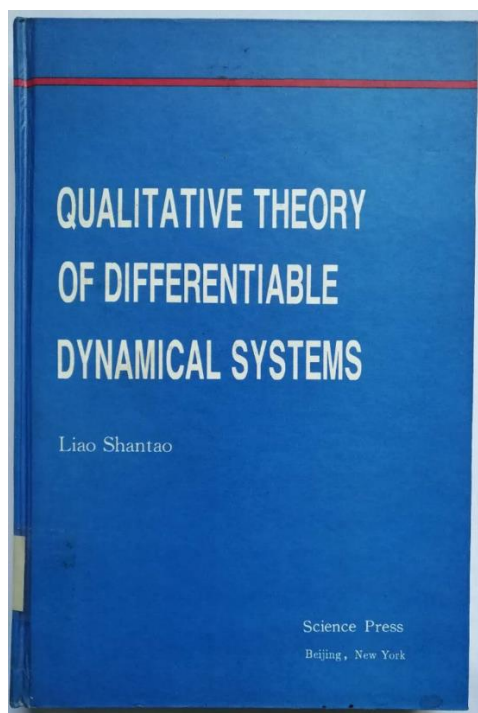
虽然没有认识先生，但在张筑生老师，特别是文兰老师的影响下，我很快就开始接触微分动力系统的前沿研究课题。在跟随张老师和丁同仁先生学习一年的微分动力系统之后，在南开暑期学校，文老师开设了稳定性猜测的专门课程，从此与稳定性猜测以及相关问题的研究结缘。随后，自学过一段时间的拓扑动力系统以及微分遍历论。

在硕士临近毕业时，文老师建议我学习廖先生的理论，为此购买了先生的专著《微分动力系统的定性理论》，该书一直陪伴至今。硕士毕业后在清华工作期间，文老师的讨论班上开始轮流报告专著的部分内容。印象中当年讨论班上人比较少，只有董镇喜老师，唐云老师，文老师，孙文祥老师，章梅荣老师。不管是报告人还是听众都很痛苦。



先生关于微分动力系统的工作主要用中文发表，由于当时国内还没有人懂先生的工作，所以在很长一段时间，先生不同意将工作翻译成英文。由于文老师讨论班开始认真学习，先生同意将专著翻译成英文。如果将先生的遗产比作一座金山，它其实有两把锁。第一把锁是语言-中文。

为了让更多人了解先生的理论，95 前后开始翻译先生的专著，主要参与者包括董镇喜，詹汉生，唐云，文兰，孙文祥，章梅荣与我，我负责翻译其中的第四章（阻碍集 I）和第六章（阻碍集 II）。回头看去，很多东西当时其实都没有弄明白。后来 2007 年在董镇喜、周作领、熊金城和文兰老师的推动下，在广州还举行过一次廖理论讲习班（主讲的有文兰、孙文祥、代雄平和我）。这些都对廖理论的传播起到了一定的作用。基本上可以说，廖理论是在先生逝去之后才开始渐渐为人理解。



先生用英文发表的重要工作之一是 1980 年在数学年刊上的“On the stability conjecture”，文中先生首次证明了二维微分同胚的稳定性猜测。这一工作为先生赢得了世界声誉。正是在这篇文章中，先生证明了著名的筛滤引理，这连同一年前《一个关于周期轨道存在的定理》构成了阻碍集理论的两大核心工具。

廖封闭引理则与 Katok 封闭引理齐名：一个处理 C^1 准双曲情形，一个处理 $C^{1+\alpha}$ 非一致双曲情形；发表年代一个是 1979，一个是 1980；证明手法也有相当的共通之处，关键之处都是去构造一非自治的线性变换将问题转化为一致双曲。

筛滤引理大致相当于 Mañé 稳定性猜测证明的第二步（定理 II.1），二者适用范围不同。在当前“后双曲”时代的研究中，筛滤引理依然展现了强大的生命力。文老师重新整理筛滤引理的证明后，这一引理才逐渐广为人知。

阻碍集理论的重要应用主要包括星号流研究与远离同宿切（同宿分支）系统与 Palis 稠密性猜测的研究。在星号流研究中包括用来解决无奇星号流猜测，

刻画有奇星号流的奇异双曲性；解决微分同胚 Palis 弱稠密性猜测，刻画远离同宿切（同宿分支）系统的部分双曲性，解决三维有奇向量场 Palis（弱）稠密性猜测。在这些应用中阻碍集理论起了不可替代的作用。

廖先生的另一大理论是典范方程组，它是先生研究工作的根本工具，但是太过沉重，构成了廖先生遗产的第二把锁。代雄平曾在广州讲习班上讲过，但迄今未见实质性发展。在证明三维有奇向量场 Palis 弱稠密性猜测时，杨大伟与我主要采取（重新调整）庞加莱流的方法得到了典范方程组的部分结论，从而部分解开第二把锁。

在廖理论的推广方面，我们将廖封闭引理推广到伪轨跟踪情形（甘，韩波-文晓），给出了另一种形式的筛滤引理（文晓-甘-文兰）。

如果以先生为标杆，勉强称得上创新的工作就是广义线性庞加莱流的引入。阻碍集的定义中需要用到一个特殊的流（ Ψ 流），其构造的一个关键是如何在奇点定义该流（紧化）。后来这一紧化的思想在李明-甘-文兰的广义线性庞加莱流的引入中起了重要作用。就我本人而言，广义线性庞加莱流是我（参与的）迄今为止最具原创性的工作。广义线性庞加莱流连同先生的筛滤与跟踪现在成为研究有奇向量场的三个主要工具。

由于两把锁的存在，先生的工作在上世纪很少被他人引用（除了少数几位稳定性研究的专家外）。但随着先生理论的传播，从本世纪开始，国内外都有越来越多的人开始引用、理解和掌握先生的理论。我相信在将来一定会有更多的人加入这一行列。下面是引用或间接引用先生工作的部分名单：

文兰、王铎、夏志宏、胡森、郑作环、甘少波、王晓峰、李明、张勇、朱玉峻、朱圣芝、文晓、杨大伟、杨佳刚、田学廷、周云华、梁超、刘耿、廖

刚、史逸、张鹏飞、王晓东、肖欠英、张一威、王式柔、张金华、郑如松、吴
万楼、杨帆……

Anosov, Avila, Bochi, Bonatti, Buzzi, Crovisier, da Luz, Diaz, Hayashi,
Morales, Newhouse, Pacifico, Palis, Potrie, Pugh, Pujals, Sambarino, Shub,
Tahzibi, Vargas, ……